Devoir de synthèse N°2

Durée: 3.h

Exercice N°1: (3 pts) (20 mn)

Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de choisir cette réponse.

L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1/ Soit Δ une droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

a) $d(O,\Delta)=0$ b) $d(O,\Delta)=\sqrt{3}$ c) $d(O,\Delta)=3$

2/ L'aire d'un parallélogramme ABCD est égale à

a) $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$ b) $\left\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{DB}\right\|$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

3/ P et Q deux plans sécant suivant une droite Δ , si $\overrightarrow{n_p}$ est un vecteur normale de P et $\overrightarrow{n_Q}$ est un vecteur normale de Q alors un vecteur directeur de Δ est :

a) $\overrightarrow{n_P}+\overrightarrow{n_Q}$ b) $\overrightarrow{n_P}-\overrightarrow{n_Q}$ c) $\overrightarrow{n_P}\wedge\overrightarrow{n_Q}$

4/ On donne $A(0,6,0)$ et $B(6,0,0)$. Une équation du plan médiateur du segment [AB] est :

a) $x-y+1=0$ b) $x+y+z-6=0$ c) $x-y=0$

Exercice N°2: (3pts) (30 mn)

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}= e^2\sqrt{U_n} \end{cases}$

1/ Calculer U_1 et U_2

2/ Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \ln(U_n) - 4$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géometrique de raison $q=\frac{1}{2}$ dont on déterminera le premier terme.

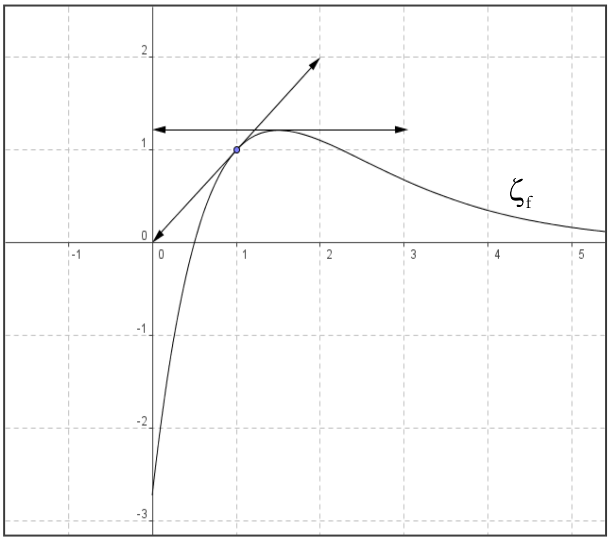
b) Exprimer V_n en fonction de n. En déduire U_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de U_n

Exercice N°3 (3pts) (30 mn)

On donne ci-dessous la courbe ζ_f d'une fonction f définie sur $[0,+\infty[$

et ses tangentes au points d'abscisses 1 et $\frac{3}{2}$



1/ Lire graphiquement $f(1), f'(1)$ et $f'(\frac{3}{2})$

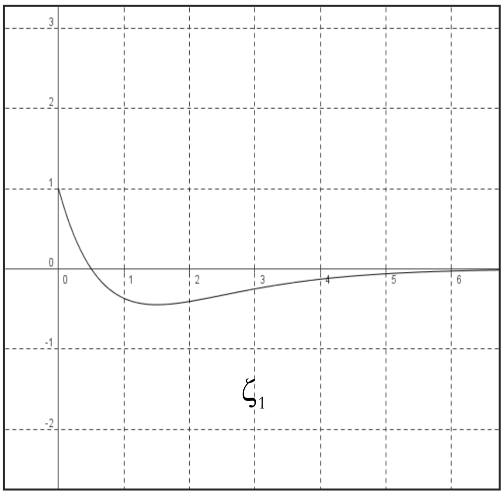
2/ On admet que $f(x)=(ax+b)e^{-x+1}$

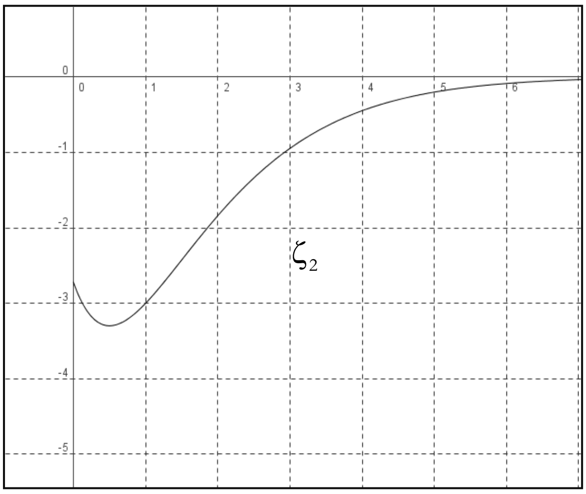
a) Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b

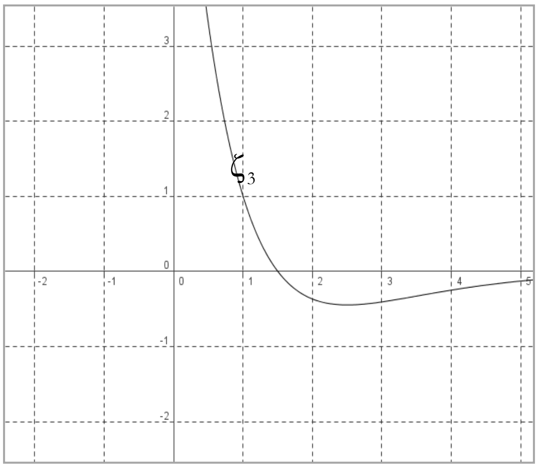
b) Déduire l'expression de f

3/ Parmi les trois courbes ζ_1, ζ_2 et ζ_3

Préciser celle de $f'(x)$ fonction dérivée de f et celle de F une primitive de f







Exercice N°4 (6 pts) (50 mn)

L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On donne les points $A(1,1,-2);B(1,2,-2)$ et $C(0,1,1)$

1/a) Montrer que les points A,B et C définissent un plan P

b) Vérifier qu'une équation du plan P est : $3x-z-1=0$

2/Soit le point $D(-2,1,3)$

Montrer que ABCD est tétraèdre puis calculer son volume

3/a) Donner une équation cartésienne du plan Q passant par A et perpendiculaire à (AC)

b) Montrer que P et Q sont perpendiculaires suivant (AB)

4/ Soit S_m l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que : $x^2+y^2+z^2-2x-2my+4z+4=0$; $m\in\mathbb{R}$

a) Montrer que pour tout réel m , S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m

b) Montrer que I_m décrit la droite (AB) lorsque m varie dans $\mathbb{R}$

c) Déterminer l'intersection de S_m avec le plan P

Exercice N°5 (5 pts) (50 mn)

I- Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x^2-1+\ln(x)$

1/ Justifier les résultats du tableau de variation de g

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$			
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2/ Déduire le signe de g(x)

II- Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x-\dfrac{\ln(x)}{x}$

1/a) Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$ on a $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

2/a) Montrer que la droite Δ d'équation $y=x$ est une asymptote à ζ_f

b) Etudier les positions relatives de ζ_f et Δ

3/ Compléter ζ_f et Δ sur la feuille annexe

4/Soit h la restriction de f sur $]0,1]$

a) Montrer que h réalise une bijection de $]0,1]$ sur $[1,+\infty[$

b) Construire $\zeta_{h^{-1}}$ la courbe de la fonction réciproque de h dans le même repère que ζ_f

5/ Déterminer la primitive F de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.

ANNEXE à rendre avec la copie d'examen

Nom…………………….. Prénom…………………….. N°…… **4sc**….